

Žonglování s matematikou, matematika v žonglování

Michal Zamboj

Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

E-mail: zamboj@karlin.mff.cuni.cz

Anotace

Dílna prakticky navazuje na předcházející přednášku: Matematika v žonglování, žonglování s matematikou, která je ve formě videozáznamu k dohledání na webu konference, nebo na webové adrese: <https://youtu.be/dJpWL3bd-2E>. Během dílny se účastníci učili žonglovat základní kaskádu se třemi míčky a taky se pokoušeli sestrojít složitější žonglérské triky na základě matematické teorie.

Potřebné pomůcky

Žonglovat se dá v podstatě s čímkoliv, vhodné jsou zejména žonglérské míčky běžně dostupné v obchodech s žongléřským náčiním, případně svépomocí vytvořeny z nafukovacích balónů, nebo tenisových míčků naplněných rýží, či např. prosem. Pro matematický podklad je potřebná pak už jen tužka a papír.

Jak na to

Kombinovaná dílna má za cíl spojit jak tělesnou aktivitu — žonglování, tak i čistě teoretickou složku — vymýšlení triků za pomoci matematického popisu. Oboje zpočátku vyžaduje velké soustředění a zejména od praktického žonglování je vhodné si několikrát odpočinout místo úmorného opakování stejného triku. Protože žonglování vyžaduje, mimo singularit, zejména pohyb a jak vizuální, tak hmatové vjemy, je tedy k němu ideální osobní instruktáž. Marně totiž budete hmatat písmenka na papíru. Uveďme si jen několik obecných tipů jak začít a na co si ze zkušenosti dávat pozor, jak u sebe, tak když to někoho učíme.

1. Házíme jeden míček z jedné ruky do druhé. Důležité je stát, ne sedět ani se opírat a nemít žádný batoh na zádech. Míček opisuje trajektorii „obloučku“ při

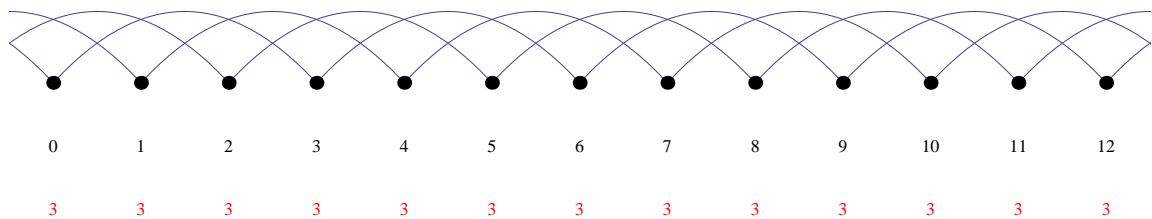
vyhazování z obou ruk, vrchol obloučku je ve výši očí, nebo těsně nad hlavou, ruce jsou spuštěny v ramenech a loktech, důležitý je spíš pohyb předloktí, než dlaně a zápěstí. Pohyb předloktí by měl vytvářet nejmíň pravý úhel v loktech (t.j. mezi 90° a 180° pro vystřenou ruku). Tyto zásady je vhodné se učit hned, protože při složitějších pohybech na ně při soustředění obvykle nezbyde v hlavě čas a prostor.

2. Házíme dva míčky do obloučku. Ruce se střídají, obvykle začneme silnější rukou, když je míček téměř ve vrcholu obloučku, vyhodíme (pod první míček) druhý míček z druhé ruky do obloučku, když míčky postupně dopadnou, zastavíme a opakujeme (začínající silnější ruku je dobré měnit, častokrát má slabší ruka menší fixaci na přednaučené pohyby a učí se tedy rychleji). Základní problém je obvykle posouvání, resp. přechytávání druhého míčku, což by obvykle nevedlo k vítězné a zasloužené kaskádě na závěr.
3. Házíme dva míčky do obloučků a plácáme se po stehnech. Protože se chceme naučit žonglovat se třemi míčky a zatím máme jenom dva, je vhodné si třetí hod nějak vynahradiť. K tomu nám pomůže plácnutí se po stehně. Házíme postupně oblouček z první ruky, když je míček téměř navrchu, tak oblouček z druhé ruky, když je téměř navrchu (první míček je pořád před dopadem), tak první rukou plácáme po prvním stehnu. Zaposloucháme-li se do poslední věty, tak celkový zvuk by měl být HOP-HOP-BUM, kde HOP je definováno jako hod míčku a BUM jako plácnutí. Typický problém vzniká při nesprávné záměně vyhození druhého míčku a plácnutí a zní HOP-BUM-HOP. Po zvládnutí přehození z obou stran není nutné dále zastavovat a lze pokračovat bez zastavení z obou stran.
4. Přehození tří míčků lze racionálně rozdělit na čtyři kroky. Dva míčky držíme v silnější ruce, jeden v druhé ruce. Nultým krokem je pouhé postupné vyhození všech tří míčků a platí přísný zákaz chytání. Házíme postupně první míček ze silnější ruky, pak druhý míček ze slabší ruky a znovu třetí míček ze silnější. Důležité je vzkutku hezky házet, protože když házíme správně, pak je chytání jednoduché. Ověřit správný rytmus a výšky házení si můžeme posloucháním jejich dopadů na zem. Obvykle není nutné opakovat víc než 3 krát a postupopit k dalšímu kroku. Opět rozdělíme míčky po 2 do silnější ruky a jeden do slabší. Znovu postupně házíme a tentokrát chytíme poslední hozený míček (má skončit ve slabší ruce). Když se nám to povede, stejný postup opakujeme dále a chytáme poslední 2 míčky. Různobarevné míčky nám pomůžou ověřit jestli jsou jejich pozice správné. Nakonec chytíme všechny tři míčky. Dobré je taky naučit se začínat ze slabší ruky — to častokrát pomůže, když se snažíme v házení pokračovat a nezastavovat.
5. Mezi typické problémy patří házení příliš dopředu, které časem zmizí. Na začátku se buď přizpůsobíme a budeme chodit dopředu, nebo se stačí posta-

vit ideálně před gauč, či postel, abychom se nemohli hýbat dopředu a zároveň jsme míčky nemuseli tolik zdvíhat ze země. Důležité je dále mít ze žonglování radost, správně dýchat (resp. nezapomínat dýchat, to se dá odfiltrovat např. mluvením), oddechovat, střídat triky a kdo chce, může začít počítat.

Zdá-li se nám žonglování někdy jako naprostý chaos, můžeme ho zkusit matematicky popsat. Shrneme si jen základní principy jednoho z takových popisů, detaily najde zanícený čtenář například ve slovenštině v diplomové práci [2], ze které přímo čerpáme, nebo anglicky v populárně-naučné knize [1]. Abychom popsali žonglérské triky, je potřebné si nejdříve stanovit limity tohoto popisu. V našem případě nás zajímají trajektorie míčků a zejména jejich pořadí při chytání. Vyhneme se tedy většině atraktivních triků jako je házení za zády, pod nohou a podobně. Taky nás nebudou zajímat různé pohyby rukou. Uvažujeme tedy, že ruce jsou ve dvou pevných pozicích v prostoru, doba mezi chycením a vyhozením míčku je nulová, ruce se pravidelně střídají do konstantního rytmu. Zdá se, že nám toho moc na vymýšlení triků nezbylo, opak je však pravdou.

Budou nás zajímat různé „výšky hodů“ míčků, které se mohou vyskytovat v jednotlivých tricích, přičemž trikem budeme rozumět pravidelně se opakující posloupnost hodů. Výšku ale nebudeme měřit pomocí vzdálenosti, místo toho budeme o výšce mluvit jako o počtu úderů v čase od vyhození až po jeho chycení. Například každý hod v klasické kaskádě se třemi míčky má tím pádem výšku 3. Hod o výšce 4 vyhozen z pravé ruky prolítá prvním úderem (na řadě je levá ruka), druhým úderem (pravá), třetím úderem (levá) a na čtvrtý úder dopadne zpátky do pravé ruky. Jednoduchým pozorováním tedy je, že hody o lichých výškách dopadnou do druhé ruky a hody o sudých výškách dopadnou do stejné ruky, jako je ruka vyhození. Pokusme se se ještě zformulovat vlastnost, která zamezí srážení míčků v rukách: Na každý úder je chycen a vyhozen nejvýše jeden míček a když je nějaký míček chycen, je následně vyhozen (na ten samý úder). Doplníme to ještě představou, že žonglér vždy žongloval, pořád žongluje a nikdy neskončí, a to jen proto, abychom se v popisu netrápili začínáním a ukončováním žonglování.



Obrázek 1: Graf kaskády se třemi míčky počínaje úderem 0. Vrchní řádek čísel označuje údery a spodní řádek výšky hodů.

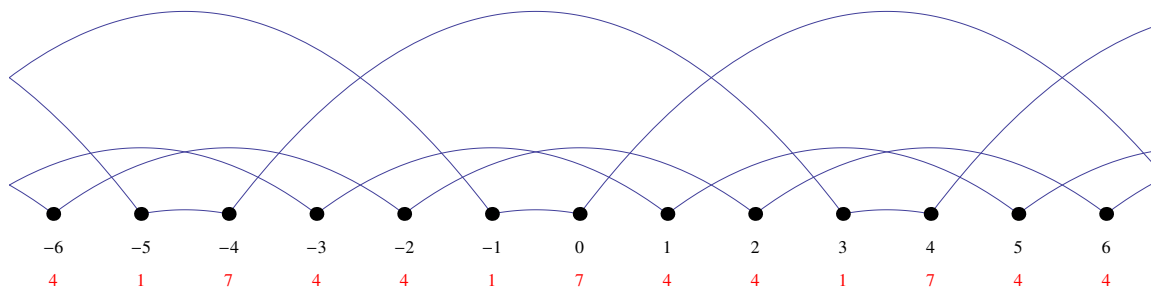
Představme si teď, že žonglér žongluje kaskádu se třemi míčky a kráčí vpřed podél stěny. Trajektorie míčků promítneme z boku kolmo na stěnu, čímž nám vznikne graf

žonglování (Obrázek 1). Oblouky v grafu jsou trajektorie míčků a tečky označují úder v čase. Podíváme-li se na konstantně rozdělený čas na celočíselné ose, můžeme obráceně každému úderu $b \in \mathbb{Z}$ v čase přiřadit výšku $\vartheta_b \in \mathbb{N}_0$ nějakého hodů. Podstatné je, aby dopady $\lambda_b \in \mathbb{Z}$ těchto hodů byly různé (t.j. dva míčky nedopadnou ve stejnou dobu). Takové přiřazení nazýváme žonglovací funkce, musíme však dávat pozor na to, aby splňovalo předpoklady našeho modelu žonglování. Všechno to shrneme do jedné precizní definice: *Nechť je dána funkce $\vartheta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$, která všem $b \in \mathbb{Z}$ přiřadí výšku hodů $\vartheta(b)$. Dále definujme dopadovou funkci $\lambda : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tak, že $\lambda(b) = b + \vartheta(b)$. Je-li λ permutací¹ celých čísel, říkáme, že ϑ je žonglovací funkce a nekonečná posloupnost:*

$$\dots \vartheta(-3)\vartheta(-2)\vartheta(-1)\vartheta(0)\vartheta(1)\vartheta(2)\vartheta(3)\dots$$

může být žonglována.

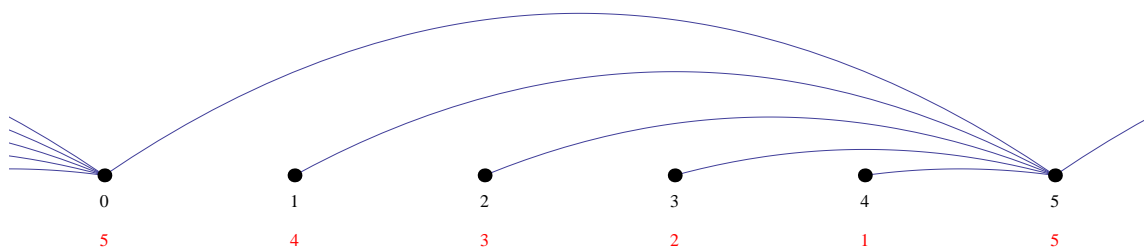
Podívejme se na jeden složitější příklad opakující se posloupnosti 7441 a příslušný graf (Obrázek 2).



Obrázek 2: Graf opakujícího se triku s výškami hodů 7441 se čtyřmi míčky.

Omezíme-li se jenom na opakující se posloupnost, která vytváří žonglovací funkci, nazveme ji *žonglovací posloupnost*, nebo *siteswap*. Zkoumání vlastností siteswapů se dnes věnují hlavně matematikové žongléri v oblasti kombinatoriky a algebry. Uveďme si jen jedno hezké pozorování, ale s netriviálním důkazem. Když nás totiž zajímá počet míčků v dané posloupnosti, stačí si vypočítat její aritmetický průměr. Pro posloupnost 7441 dostáváme počet míčků $\frac{7+4+4+1}{4} = 4$, což můžeme taky ověřit spočítáním trajektorií v grafu. Pozor, tato podmínka je nutná, ne však postačující k tomu, aby šlo danou posloupnost žonglovat. Jako protipříklad si uvedme posloupnost 54321, která má aritmetický průměr 3, ale všechny míčky dopadnou v stejný čas (Obrázek 3).

¹Permutací se tady zjednodušeně myslí to, že časy dopadů jsou různé.



Obrázek 3: Graf posloupnosti 54321, která není žonglovací posloupností.

Reference

- [1] B. Polster: *The Mathematics of Juggling*. New York: Springer - Verlag, 2003.
- [2] M. Zamboj: *Matematická teória žonglovania*. Diplomová práce, Univerzita Karlova, Praha, 2014.